

Approved For Release STAT
2009/08/31 :
CIA-RDP88-00904R000100130

Dec

Approved For Release
2009/08/31 :
CIA-RDP88-00904R000100130



Вторая Международная конференция
Организации Объединенных Наций
по применению атомной энергии
в мирных целях

A/CONF/15/P
USSR
ORIGINAL: RUSSIAN

2469

Не подлежит оглашению до официального сообщения на Конференции

DETERMINING THE EFFECTIVENESS OF CONTROL RODS IN
A CYLINDRICAL REACTOR

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОРГАНОВ РЕГУ-
ЛИРОВАНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ

Г.В.Синютин, В.Г.Семенов

Постановка задачи

В процессах разогревания активной зоны реактора, отравления продуктами деления и выгорания ядерного горючего происходит изменение реактивности системы. Целью настоящей работы является определение эффективности конечного числа поглощающих стержней, введенных для компенсации изменений реактивности в активную зону реактора конечных размеров.

Рассматривается цилиндрический реактор с внешним радиусом R и высотой H (в величинах R и H учитывается экстраполированная добавка). Активная зона реактора рассматривается как однородная среда, обладающая $K_{\infty} > 1$, с известными поглощающими и замедляющими свойствами. В активную зону вводится конечное число (N) цилиндрических поглощающих стержней с радиусами ρ_i ; ($i = 1, 2, \dots, N$); длина стержней равна высоте активной зоны. После введения стержней реактор предполагается критическим. Математически задача об эффективности системы из конечного числа поглощающих стержней сводится к задаче на определение собственного значения. Таким собственным значением может быть K_{∞} , R , ρ_i и т.д. В задаче находится такое собственное значение рассматриваемого параметра, которое соответствует критичности системы. Сравнивая собственные значения задачи при наличии стержней и без них, можно определить эффективность системы поглощающих стержней.

25 YEAR RE-REVIEW

-2-

Эффективность конечного числа поглощающих стержней в одногрупповом рассмотрении

Предполагается, что выражение потока нейтронов удовлетворяет стационарному уравнению диффузии. Поглощающий стержень считается "черным", т.е. на некоторой глубине от внешней поверхности стержня поток нейтронов обращается в нуль^{x)}.

Выражение потока нейтронов удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Phi + \kappa^2 \Phi = 0 \quad /1/$$

Уравнение /1/ допускает разделение переменных. Так как наличие стержней не меняет распределения нейтронов по высоте реактора, граничные и краевые условия можно записывать только для радиальной составляющей потока. В реакторе конечных размеров

$$\kappa^2 = \mu^2 + \kappa_z^2 \quad /2/$$

где μ — характеризует распределение потока по радиусу активной зоны, а κ_z^2 — по высоте, причем $\kappa_z^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$.

Для реактора больших размеров ($k_\infty - 1 \ll 1$)

$$\kappa^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2} \quad /3/$$

M^2 — площадь миграции.

В активной зоне, имеющей поглощающие стержни, в общем случае можно записать выражение для потока нейтронов в пространстве между стержнями (по радиусу) в виде суперпозиции двух решений:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_{\text{рег}} + \Phi_{\text{нерег}}, \quad /4/$$

^{x)} Если поглощающий стержень не является "черным", то поток на его поверхности приравнивается не нулю, а значению потока внутри стержня. Если стержень "серый", то на его поверхности ставится условие: $\delta_{\text{сер.}} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r_i}$; $\delta_{\text{сер.}}$ — должно быть известно /1/

2907-80

-3-

где $\Phi_{\text{рег}}$ - функция, не имеющая особенностей ни в одной точке;

$\Phi_{\text{нерег}}$ - функция, имеющая особенности в точках, соответствующих положениям осей поглощающих стержней.

В цилиндрической системе координат с началом в центре активной зоне в общем виде функции $\Phi_{\text{рег}}$ и $\Phi_{\text{нерег}}$ можно записать с помощью следующих выражений:

$$\Phi_{\text{рег}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n I_n(\mu r) e^{in\theta} \quad /5/$$

$$\Phi_{\text{нерег}} = \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^k Y_m(\mu |\vec{r} - \vec{r}_k|) e^{im\psi_k}, \quad /6/$$

где I_n и Y_m - функция Бесселя n -го и m -го порядка, первого и второго рода соответственно; μ - рассматривается как параметр, собственное значение которого отыскивается в задаче; \vec{r} - радиус-вектор точки наблюдения (текущая точка); \vec{r}_k - радиус-вектор оси k -го поглощающего стержня; θ и ψ_k - координатные углы (см. рис. 1); A_n и B_m^k - постоянные коэффициенты, индекс k относится к k -му стержню; сумма по "К" распространена на все поглощающие стержни, число которых равно N . С помощью тождественных преобразований можно получить выражение потока Φ как функцию только r и θ или только $|\vec{r} - \vec{r}_k|$ и ψ_k . Применение к этим выражениям условно, что на внешнем радиусе аппарата ($r=R$) поток обращается в нуль независимо от значения угла θ , а затем условие обращения в нуль потока на поверхности k -го стержня ($|\vec{r} - \vec{r}_k| = \rho_k$) независимо от значения угла ψ_k получим уравнения для определения коэффициентов A_n и B_m^k .

Запишем выражение потока как функцию только r и θ

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n I_n(\mu r) e^{in\theta} + \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^k \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\psi_k} Y_{m+\nu}(\mu r_k) I_{\nu}(\mu r_k) e^{i(m+\nu)\theta} \quad /7/$$

-4-

Это выражение получено с помощью известной теоремы сложения /2/ для функции Бесселя, примененной к функциям $Y_m(\mu|\vec{r}-\vec{r}_k|)e^{im\psi_k}$ для координатных углов ψ_k и Θ , в предположении, что $r > r_k$ и так как оно необходимо для записи условия при $r = R$, то предположение, что $r > r_k$ будет выполняться.

К уравнению /7/ применим условие: $\Phi(R, \Theta) = 0$ при любом значении Θ . Тогда уравнение /7/ будет представлять линейную комбинацию функций $e^{in\Theta}$ с нулевой правой частью. В силу линейной независимости функций $e^{in\Theta}$ с разными значениями n коэффициент при каждой угловой гармонике $e^{in\Theta}$ должен быть равен нулю, фиксируем некоторую гармонику n ($n + \nu = \nu$) тогда получим:

$$A_n I_n(\mu R) + \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^k Y_m(\mu R) I_{n-m}(\mu r_k) e^{-i(n-m)\Theta_k} = 0. \quad /8/$$

Зафиксируем теперь произвольно выбранный ℓ -тый стержень и запишем выражение потока как функцию только $|\vec{r}-\vec{r}_\ell|$ и ψ_ℓ . В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi(|\vec{r}-\vec{r}_\ell|, \psi_\ell) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} I_{n-\nu}(\mu r_\ell) I_\nu(\mu|\vec{r}-\vec{r}_\ell|) e^{i(n-\nu)\Theta_\ell} e^{i\nu\psi_\ell} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^\ell Y_m(\mu|\vec{r}-\vec{r}_\ell|) e^{im\psi_\ell} + \\ & + \sum_{\substack{k \\ k \neq \ell}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^k \sum_{\delta=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+\delta} Y_{m-\delta}(\mu r_{k\ell}) I_\delta(\mu|\vec{r}-\vec{r}_\ell|) e^{i(m-\delta)\Theta_{k\ell}} e^{i\delta\psi_\ell}. \end{aligned} \quad /9/$$

Это выражение также получено с помощью теоремы сложения для функций Бесселя, примененных к функциям $Y_m(\mu|\vec{r}-\vec{r}_k|)e^{im\psi_k}$ для координатных углов ψ_k и ψ_ℓ при условии $r_{k\ell} > |\vec{r}-\vec{r}_\ell|$ и к функциям $I_n(\mu r)e^{in\Theta}$ для координатных углов Θ и ψ_ℓ . Выражение /9/ необходимо для записи условия на поверхности ℓ -го стержня, поэтому ограничение $r_{k\ell} > |\vec{r}-\vec{r}_\ell|$ будет выполнено.

К уравнению /9/ применим условие обращения в нуль потока нейтронов на поверхности ℓ -го стержня, т.е. $\Phi(\rho_\ell, \psi_\ell) = 0$, где ρ_ℓ - эффективный радиус стержня с учетом глубины экстраполя-

-5-

ции. Так же как и в предыдущем случае это условие запишется как линейная комбинация функции $e^{i\nu\psi_0}$ с нулевой правой частью. В силу линейной независимости функций $e^{i\nu\psi_0}$ с разными значениями ν коэффициент при каждой угловой гармонике $e^{i\nu\psi_0}$ следует положить равным нулю. Фиксируя некоторую гармонику ν ($m=\nu$, $\nu=\nu$), получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n I_{n-\nu}(\mu r_e) I_{\nu}(\mu \rho_e) e^{i(n-\nu)\delta_e} + B_{\nu}^e Y_{\nu}(\mu \rho_e) + \\ + \sum_{\substack{k \\ k \neq e}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^k (-1)^{m+\nu} Y_{m-\nu}(\mu r_{ke}) I_{\nu}(\mu \rho_e) e^{i(m-\nu)\vartheta_{ke}} = 0. \quad /10/$$

2909-111
Таким образом задача свелась к уравнениям /8/ и /10/. Полагая в /8/ $n=0, 1, 2, \dots$, а в /10/ $\nu=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и ограничиваясь определенным количеством членов в рядах, входящих в уравнения /8/ и /10/, получим относительно коэффициентов A_n и B_m^k систему алгебраических линейных однородных уравнений. Задавая размеры реактора и размеры и положения стержней (т.е. задавая величины R , r_k , r_{ke} , ρ_e , ϑ_{ke} и δ_k) мы сводим задачу к определению собственного значения единственного неизвестного параметра μ . Для существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений необходимо, чтобы ее детерминант был равен нулю, т.е.

$$\text{Det}(\mu) = 0 \quad /11/$$

Решая уравнение /11/, определяем собственное значение μ , соответствующее критичности системы (первый положительный корень уравнения), а по найденному μ с помощью формул /2/ и /3/ находим k_{∞} критической системы со стержнями. Для нахождения эффективности стержней нужно сравнить значение μ (или k_{∞}) со значением μ' (или k'_{∞}), соответствующим активной зоне без стержней. μ' находится из условия:

$$I_0(\mu' R) = 0. \quad /12/$$

Следует заметить, что уравнения /8/ и /10/ получены с учетом угловой зависимости потока от координатных углов без каких бы то ни было предположений о взаимном расположении стержней. Это позволяет рассматривать задачу об эффективности стержней с большим радиусом,

-6-

не делая обычных ограничений о малости радиуса стержней по сравнению с расстоянием между ними.

Заметим также, что из действительности выражения потока $\Phi(\vec{r})$ следует зависимость между коэффициентами с положительными и отрицательными индексами:

$$\begin{aligned} A_{-n} &= (-1)^n A_n^* \\ B_{-n}^k &= (-1)^n B_n^{k*} \end{aligned} \quad /13/$$

где * — означает комплексную сопряженность.

Случай N одинаковых поглощающих стержней, симметрично расположенных относительно оси активной зоны

Представляет интерес рассмотреть N одинаковых стержней, расположенных симметрично вокруг оси активной зоны (рис. 2). При этом все $\tau_k = \tau_0$, все $\rho_k = \rho$; $k=1,2,3,\dots,N$, $B_m^k = B_m$. Тогда уравнения /8/ и /10/ примут вид:

$$A_n I_n(\mu R) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m Y_n(\mu R) I_{n-m}(\mu \tau_0) \sum_k e^{-i(n-m)\varphi_k} = 0. \quad /14/$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n I_{n-v}(\mu \tau_0) I_v(\mu \rho) e^{i(n-v)\varphi_0} + B_v Y_v(\mu \rho) + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m (-1)^{m+v} I_v(\mu \rho) \sum_{\substack{k \\ k \neq v}} Y_{m-v}(\mu \tau_{k0}) e^{i(m-v)\varphi_{ke}} = 0. \end{aligned} \quad /15/$$

Из периодичности потока по углу Θ с периодом $2\pi/N$ и из инвариантности записи уравнений /14/ и /15/ относительно выбора фиксированного ϑ -го стержня, так как все стержни одинаковы и находятся в одинаковых условиях, можно получить, что все индексы n , m и v могут принимать только значения, кратные N .

Если начало отсчета углов проходит через ось какого-либо стержня, то уравнения /14/ и /15/ будут действительными. При этом

-7-

действительными будут и коэффициенты A_n и B_m , поэтому из условия /13/ следует, что

$$\begin{aligned} A_{-n} &= (-1)^n A_n \\ B_{-m} &= (-1)^m B_m, \end{aligned} \quad /16/$$

кроме того в уравнении /14/ $\sum_k e^{-i(n-m)\delta_k} = N$.
Тогда уравнения /14/ и /15/ примут вид:

$$A_{Nn} I_{Nn}(\mu R) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} N \cdot B_{Nm} Y_{Nm}(\mu R) I_{N(n-m)}(\mu r_0) = 0 \quad /17/$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{Nn} I_{N(n-v)}(\mu r_0) I_{Nv}(\mu \rho) + B_{Nv} Y_{Nv}(\mu \rho) + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{Nm} (-1)^{N(m+v)} I_{Nv}(\mu \rho) \sum_{\substack{k \\ k \neq v}} Y_{N(m-v)}(\mu r_{ke}) \cos N(m-v) \delta_{kv} = 0, \end{aligned} \quad /18/$$

где индексы n , m и v пробегает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Заметим, что если пренебречь угловой зависимостью потока вокруг поглощающих стержней, то задача упростится. Приравняв в этом случае нулю детерминант системы уравнений /17/ и /18/, получим:

$$\begin{vmatrix} I_0(\mu R) & 0 & \dots & 0 & N I_0(\mu r_0) Y_0(\mu R) \\ 0 & I_N(\mu R) & \dots & 0 & N I_N(\mu r_0) Y_N(\mu R) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & I_{nN}(\mu R) & N I_{nN}(\mu r_0) Y_{nN}(\mu R) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} I_0(\mu \rho) I_0(\mu r_0) & 2 I_0(\mu \rho) I_N(\mu r_0) & \dots & 2 I_0(\mu \rho) I_{nN}(\mu r_0) & Y_0(\mu \rho) + I_0(\mu \rho) \sum_{\substack{k \\ k \neq v}} Y_0(\mu r_{ke}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Разложив этот определитель по элементам последней строки, нетрудно получить следующее выражение:

-8-

$$\frac{Y_o(\mu\varphi)}{I_o(\mu\varphi)} + \sum_{\substack{k \\ k \neq \nu}} Y_o(\mu r_{ke}) = N \sum_{-\infty}^{\infty} [I_{nN}(\mu r_o)]^2 \frac{Y_{nN}(\mu R)}{I_{nN}(\mu R)}; \quad /19/$$

Таким образом, приходим к результату, полученному в работе(3).

Эффективность конечного числа поглощающих стержней в двухгрупповом рассмотрении

В ряде случаев двухгрупповое рассмотрение оказывается значительно более правильным по сравнению с одногрупповым, во-первых, потому, что в активной зоне реактора не все нейтроны являются тепловыми, во-вторых, потому, что двухгрупповое рассмотрение позволяет рассчитывать эффективность поглощающих стержней сложной структуры. Так, если бы мы рассматривали в двух группах сплошной поглощающий стержень, то его эффективность определялась бы только поглощением тепловых нейтронов на внешней поверхности стержня. Если же поглощающий стержень содержит внутри хороший замедлитель, то эффективность такого стержня увеличится по сравнению с эффективностью сплошного за счет замедления нейтронов внутри стержня до тепловых энергий и поглощения ставших тепловыми нейтронов на внутренней поверхности стержня.

В двухгрупповом рассмотрении удобно описывать распределение нейтронов по реактору с помощью потока поглощения j^T и потока замедления j^S , где

$$j^T = \sum_c \varphi^T \frac{1}{\varphi}, \quad j^S = \sum_s \varphi^S \quad /20/$$

φ^T и φ^S - потоки тепловых и быстрых нейтронов соответственно. \sum_c - сечение захвата тепловых нейтронов, \sum_s - замедляющая способность, φ - вероятность избежать резонансного захвата.

В диффузионном приближении функции j^T и j^S удовлетворяют системе уравнений:

$$L^2 \Delta j^T - j^T + j^S = 0$$

/21/

$$\tau \Delta j^S - j^S + K_\infty j^T = 0$$

где L^2 и τ - квадрат длины диффузии и квадрат длины замедления.

Уравнениями /21/ с соответствующими параметрами K_∞ , L^2 и τ описываются потоки нейтронов как в пространство между стержнями, так и внутри стержней.

Рассмотрим поглощающие стержни в виде цилиндрической трубы, стенки которой являются "черными" для тепловых и прозрачными для быстрых нейтронов; внутри трубы содержится хороший замедлитель (например, вода).

ρ_{1k} и ρ_{2k} - внутренний и внешний радиусы трубы k -го стержня.

Для реактора с такими стержнями граничными и краевыми условиями служат условия обращения в нуль потоков тепловых и быстрых нейтронов на внешней границе реактора, обращения в нуль тепловых потоков на эффективной границе каждого стержня ρ_k^3 и сшивки потоков быстрых нейтронов и их производных на стенках трубы каждого стержня.

В тех же координатах, что и в предыдущей части, эти условия можно записать в виде:

1) на внешней границе реактора в координатах r, θ

$$j^T(R, \theta) = 0, \quad j^S(R, \theta) = 0$$

2) на k -ом стержне в координатах $|\vec{r} - \vec{r}_k|, \psi_k$

а) для тепловых нейтронов

$$j^T(\rho_k^3, \psi_k) = 0,$$

где ρ_k^3 определяется из условия

$$\rho_k^3 = \rho_{2k} e^{-\gamma \frac{\lambda_{tt}}{\rho_{2k}}}$$

$\gamma\left(\frac{\rho_{2k}}{\lambda_{tt}}\right)$ - протабулированная функция (4), λ_{tt} - длина переноса.

б) для быстрых нейтронов

-10-

$$\frac{1}{(\sum_{s=1}^S)_{kcm}} j_{kcm}^{\delta}(\rho_{1k}, \psi_k) = \frac{1}{\sum_s} j^{\delta}(\rho_{2k}, \psi_k)$$

$$\rho_{1k} \tilde{r}_{kcm} \frac{\partial}{\partial |\tilde{r} - \tilde{r}_k|} j_{kcm}^{\delta}(\rho_{1k}, \psi_k) = \rho_{2k} \tilde{r} \frac{\partial}{\partial |\tilde{r} - \tilde{r}_k|} j^{\delta}(\rho_{2k}, \psi_k)$$

причем индекс "кст" относится к k -му стержню; потоки и параметры без такого индекса относятся к пространству между стержнями.

Решение системы уравнений /21/ для пространства между стержнями как и при одностержневом рассмотрении является суммой регулярной и нерегулярной частей.

$$j^{\tau}(\tilde{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n I_n(\alpha' r) + B_n I_n(\alpha'' r)] e^{in\theta} + \\ + \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} [C_m^k Y_m(\alpha' |\tilde{r} - \tilde{r}_k|) + D_m^k K_m(\alpha'' |\tilde{r} - \tilde{r}_k|)] e^{im\psi_k} \quad /22/$$

$$j^{\delta}(\tilde{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_n \beta' I_n(\alpha' r) + B_n \beta'' I_n(\alpha'' r)] e^{in\theta} + \\ + \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} [C_m^k \beta' Y_m(\alpha' |\tilde{r} - \tilde{r}_k|) + D_m^k \beta'' K_m(\alpha'' |\tilde{r} - \tilde{r}_k|)] e^{im\psi_k} \quad /23/$$

Решение внутри k -го стержня с учетом ограниченности в точках $|\tilde{r} - \tilde{r}_k| = 0$ имеет вид:

$$j_{kcm}^{\tau}(\tilde{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n^{kcm} I_n(\alpha'_{kcm} |\tilde{r} - \tilde{r}_k|) + B_n I_n(\alpha''_{kcm} |\tilde{r} - \tilde{r}_k|)] e^{in\psi_k} \quad /24/$$

$$j_{kcm}^{\delta}(\tilde{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{kcm} \beta'_{kcm} I_n(\alpha'_{kcm} |\tilde{r} - \tilde{r}_k|) e^{in\psi_k}, \quad /25/$$

где A_n , B_n , C_m^k , D_m^k , A_n^{kcm} - постоянные коэффициенты, I_n и K_m - функции Бесселя мнимого аргумента^{х)} первого и второго

^{х)} В функциях I_n и K_n в аргументе под величиной α имеется в виду (α) .

-11-

рода n -го и n -го порядка, соответствующие радиальной части решения \mathcal{X}' и \mathcal{X}'' , а также β' и β'' определяются известными двухгрупповыми соотношениями:

$$\mathcal{X}'^2 = -\frac{1}{2} \frac{L^2 + \tau}{L^2 \tau} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{L^2 + \tau}{L^2 \tau} \right)^2 + \frac{\kappa_{\infty} - 1}{L^2 \tau}} - \mathcal{X}_{\pi}^2$$

$$\mathcal{X}''^2 = -\frac{1}{2} \frac{L^2 + \tau}{L^2 \tau} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{L^2 + \tau}{L^2 \tau} \right)^2 + \frac{\kappa_{\infty} - 1}{L^2 \tau}} - \mathcal{X}_{\pi}^2$$

/26/

$$\mathcal{X}_{\pi}^2 = \left(\frac{\pi}{H} \right)^2$$

$$\beta' = 1 + (\mathcal{X}'^2 + \mathcal{X}_{\pi}^2) L^2$$

$$\beta'' = 1 + (\mathcal{X}''^2 + \mathcal{X}_{\pi}^2) L^2$$

Поступая как и при одnogрупповом рассмотрении, т.е. представляя выражения для $j^{\gamma}(\vec{r})$ и $j^{\delta}(\vec{r})$ сначала в координатах r, θ , а затем в координатах $|\vec{r} - \vec{r}_k|$, ψ_k и используя граничные и краевые условия, получаем однородную систему уравнений:

1) на внешней границе реактора

$$A_n I_n(\mathcal{X}' R) + Y_n(\mathcal{X}' R) \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^k I_{n-m}(\mathcal{X}' r_k) e^{-i(n-m)\gamma_k} = 0 \quad /27/$$

$$B_n I_n(\mathcal{X}'' R) + K_n(\mathcal{X}'' R) \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^k I_{n-m}(\mathcal{X}'' r_k) e^{-i(n-m)\gamma_k} = 0 \quad /28/$$

$$n = 0; \pm 1; \pm 2 \pm \dots$$

2) на границе фиксированного ℓ -го стержня:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n I_{n-\lambda}(\mathcal{X}' r_e) I_{\lambda}(\mathcal{X}' \rho_e^3) + B_n I_{n-\lambda}(\mathcal{X}'' r_e) I_{\lambda}(\mathcal{X}'' \rho_e^3) \right] e^{i(n-\lambda)\gamma_e} + \\ & + C_{\lambda}^{\ell} Y_{\lambda}(\mathcal{X}' \rho_e^3) + D_{\lambda}^{\ell} K_{\lambda}(\mathcal{X}'' \rho_e^3) + \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^k (-1)^{m+\lambda} Y_{m-\lambda}(\mathcal{X}' r_{ke}) I_{\lambda}(\mathcal{X}' \rho_e^3) + \\ & + D_m^k (-1)^m K_{m-\lambda}(\mathcal{X}'' r_{ke}) I_{\lambda}(\mathcal{X}'' \rho_e^3) \Big] e^{i(m-\lambda)\gamma_{ke}} = 0 \quad /29/ \end{aligned}$$

$$\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$$

δ)

-I2-

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\zeta \sum_{\lambda} \delta} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n I_{n-\lambda}(\alpha' r_e) I_{\lambda}(\alpha' \rho_{2e}) \beta' + B_n I_{n-\lambda}(\alpha'' r_e) I_{\lambda}(\alpha'' \rho_{2e}) \beta'' \right] e^{i(n-\lambda)\delta_e} + \right. \\
& + C_{\lambda}^{\ell} Y_{\lambda}(\alpha' \rho_{2e}) \beta' + D_{\lambda}^{\ell} K_{\lambda}(\alpha' \rho_{2e}) + \sum_{\substack{k \neq \ell \\ k \neq \ell}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[C_m^k (-1)^{m+\lambda} Y_{m-\lambda}(\alpha' r_{ke}) I_{\lambda}(\alpha' \rho_{2e}) \beta' + \right. \\
& \left. + D_m^k (-1)^m K_{m-\lambda}(\alpha'' r_{ke}) I_{\lambda}(\alpha'' \rho_{2e}) \beta'' \right] e^{i(m-\lambda)\vartheta_{ke}} \Big\} - \\
& - \frac{1}{(\zeta \sum_{\lambda} \delta)_{\ell cm}} A_{\lambda}^{\ell cm} I_{\lambda}(\alpha'_{\ell cm} \rho_{1e}) \beta'_{\ell cm} = 0 \quad /30/ \\
& \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{1e} \tau \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n I_{n-\lambda}(\alpha' r_e) \left(I_{\lambda-1}(\alpha' \rho_{2e}) - I_{\lambda+1}(\alpha' \rho_{2e}) \right) \alpha' \beta' + \right. \right. \\
& + B_n I_{n-\lambda}(\alpha'' r_e) \left(I_{\lambda-1}(\alpha'' \rho_{2e}) + I_{\lambda+1}(\alpha'' \rho_{2e}) \right) \alpha'' \beta'' \Big] e^{i(n-\lambda)\delta_e} + \\
& + C_{\lambda}^{\ell} \left[Y_{\lambda-1}(\alpha' \rho_{2e}) - Y_{\lambda+1}(\alpha' \rho_{2e}) \right] \alpha' \beta' + D_{\lambda}^{\ell} \left[-K_{\lambda-1}(\alpha'' \rho_{2e}) - K_{\lambda+1}(\alpha'' \rho_{2e}) \right] \alpha'' \beta'' + \\
& + \sum_{\substack{k \neq \ell \\ k \neq \ell}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[C_m^k (-1)^{m+\lambda} Y_{m-\lambda}(\alpha' r_{ke}) \left(I_{\lambda-1}(\alpha' \rho_{2e}) - I_{\lambda+1}(\alpha' \rho_{2e}) \right) \alpha' \beta' + \right. \\
& \left. + D_m^k (-1)^m K_{m-\lambda}(\alpha'' r_{ke}) \left(I_{\lambda-1}(\alpha'' \rho_{2e}) + I_{\lambda+1}(\alpha'' \rho_{2e}) \right) \alpha'' \beta'' \right] e^{i(m-\lambda)\vartheta_{ke}} \Big\} - \\
& - \rho_{1e} \tau_{\ell cm} A_{\lambda}^{\ell cm} \left[I_{\lambda-1}(\alpha'_{\ell cm} \rho_{1e}) + I_{\lambda+1}(\alpha'_{\ell cm} \rho_{1e}) \right] \alpha'_{\ell cm} \beta'_{\ell cm} = 0 \quad /31/ \\
& \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots
\end{aligned}$$

-13-

Из действительности выражений потоков в уравнениях /22/-/25/ следует связь между коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_{-n} &= (-1)^n A_n^* \\ B_{-n} &= B_n^* \\ C_{-n}^k &= (-1)^n C_n^{k*} \\ D_{-n}^k &= D_n^{k*} \\ A_{-n}^{kcm} &= A_n^{kcm*} \end{aligned} \quad /32/$$

Уравнения /27/-/31/ являются окончательной системой линейных однородных уравнений относительно постоянных коэффициентов. Так как \mathcal{K}' и \mathcal{K}'' однозначно связаны с K_∞ соотношениями /26/, то эту систему можно рассматривать как зависящую только от одного параметра K_∞ . Обрывая ряды в уравнениях /27/-/31/ на некотором члене и приравнявая нулю определитель полученной системы уравнений, находим собственное значение K_∞ , соответствующее критичности реактора со стержнями.

Регулирующие стержни в многозонном реакторе

Изложенный выше метод расчета может быть обобщен на случай, когда реактор состоит из нескольких цилиндрических зон, различающихся своими физическими свойствами.

Рассмотрим, например, двухзонный реактор в одногрупповом приближении. Пусть внутренняя зона характеризуется величинами $K_{1\infty}$ и M_1^2 и в ней расположено N_1 стержней, а внешняя зона - величинами $K_{2\infty}$ и M_2^2 с N_2 стержней. Если начало координат находится во внутренней зоне, то аналогично предыдущему можно записать выражения потоков в зонах в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\vec{r}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n I_n(\mu_1 r) e^{in\theta} + \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{(k_1)} Y_m(\mu_1 |\vec{r} - \vec{r}_{k_1}|) e^{im\psi_{k_1}} \\ \varphi_2(\vec{r}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_n I_n(\mu_2 r) + D_n Y_n(\mu_2 r)] e^{in\theta} + \sum_{k_2=1}^{N_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m^{(k_2)} Y_m(\mu_2 |\vec{r} - \vec{r}_{k_2}|) e^{im\psi_{k_2}}, \end{aligned}$$

-14-

где

$$\mu_1^2 = \frac{k_{1\infty} - 1}{M_1^2} - \alpha_{\pi}^2,$$

$$\mu_2^2 = \frac{k_{2\infty} - 1}{M_2^2} - \alpha_{\pi}^2.$$

Кроме условий на внешней границе реактора и на поверхности каждого стержня, на границе зон S ставятся обычные условия:

$$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$$

$$D_1 \text{grad } \varphi_1|_S = D_2 \text{grad } \varphi_2|_S,$$

где D_1 и D_2 - коэффициенты диффузии.

Представляя выражения потоков в зонах в координатах r, θ , а затем в координатах $|\vec{r} - \vec{r}_{k_1}|$, ψ_{k_1} и $|\vec{r} - \vec{r}_{k_2}|$, ψ_{k_2} для внутренней и внешней зоны соответственно и используя граничные и краевые условия так же, как и прежде, можно получить линейную однородную систему алгебраических уравнений.

Так как $k_{1\infty}$ и $k_{2\infty}$ зависят от ν -среднего числа нейтронов, вылетающих в акте деления, то μ_1 и μ_2 можно считать известной функцией общего параметра ν , собственное значение которого находится из равенства нулю определителя системы уравнений. Отличие найденного таким образом значения ν от $\nu_0 = 2,46$ даст эффект действия стержней.

Бесконечная правильная решетка поглощающих стержней

Рассмотрим в качестве частного случая бесконечную правильную решетку одинаковых поглощающих стержней (рис. 3). Поскольку все стержни находятся в одинаковых условиях, достаточно поставить граничные условия только для ν -го стержня.

Выражение для потока в одnogрупповом приближении вблизи ν -го стержня $|\vec{r} - \vec{r}_\nu| < a$, где a - шаг решетки стержней) в координатах $|\vec{r} - \vec{r}_\nu|$, ψ_ν (см. выражение /9/) записывается в виде:

-15-

$$\begin{aligned} \Phi(|\vec{r}-\vec{r}_e|, \psi_e) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} I_{n-\nu}(\mu r_e) I_{\nu}(\mu |\vec{r}-\vec{r}_e|) e^{i(n-\nu)\delta_e} e^{i\nu\psi_e} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m Y_m(\mu |\vec{r}-\vec{r}_e|) e^{im\psi_e} + \\ & + \sum_{\substack{k \\ k \neq \ell}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+s} Y_{m-s}(\mu r_{ke}) e^{i(m-s)\delta_{ke}} I_s(\mu |\vec{r}-\vec{r}_e|) e^{is\psi_e} \quad /33/ \end{aligned}$$

Если начало координат поместить в центр ℓ -го стержня, то при выборе направления отсчета углов, указанном на рис. 3, сделав замену

$$\bar{A}_n = A_n + \sum_{\substack{k \\ k \neq \ell}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m (-1)^{m+n} Y_{m-n}(\mu r_k) e^{i(m-n)\delta_k},$$

получим:

$$\Phi(r, \psi_e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\bar{A}_n I_n(\mu r) + B_n Y_n(\mu r)] e^{in\psi_e}, \quad /34/$$

причем μ кратко 6, 4 или 3 для гексагональной, квадратной и треугольной решеток соответственно, и \bar{A}_n и B_n являются действительными. К этому выражению потока применим условие $\Phi(0, \psi_e) = 0$, а вместо условия на внешней границе, как было в конечном реакторе, используем условие равенства нулю производной от потока по нормали на границе эквивалентной ячейки решетки стержней.

Наиболее просто можно приближенно учесть форму эквивалентной ячейки, если ограничиться в /34/ нулевым и первым членами разложения, при этом на границе эквивалентной ячейки условие равенства нулю производной удобно заменить условием равенства нулю производной потока в двух точках (см. рис. 3), в которых можно использовать физические условия симметрии. Например, для гексагональной решетки это будут условия:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=\frac{a}{2}}; \psi_0 = \frac{2\pi}{6} n = 0$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=\frac{a\sqrt{3}}{2}}; \psi_0 = \frac{\pi}{6} = 0.$$

или

$$A_0 I_0(\mu r) + B_0 Y_0(\mu r) = 0.$$

$$A_6 I_6(\mu r) + B_6 Y_6(\mu r) = 0.$$

$$-A_0 I_1\left(\frac{\mu a}{2}\right) - B_0 Y_1\left(\frac{\mu a}{2}\right) + A_6 \left[I_5\left(\frac{\mu a}{2}\right) - I_7\left(\frac{\mu a}{2}\right) \right] + B_6 \left[Y_5\left(\frac{\mu a}{2}\right) - Y_7\left(\frac{\mu a}{2}\right) \right] = 0$$

$$-A_0 I_1\left(\frac{\mu a\sqrt{3}}{2}\right) - B_0 Y_1\left(\frac{\mu a\sqrt{3}}{2}\right) - A_6 \left[I_5\left(\frac{\mu a\sqrt{3}}{2}\right) - I_7\left(\frac{\mu a\sqrt{3}}{2}\right) \right] - B_6 \left[Y_5\left(\frac{\mu a\sqrt{3}}{2}\right) - Y_7\left(\frac{\mu a\sqrt{3}}{2}\right) \right] = 0 \quad /35/$$

Аналогичные уравнения получаются для других видов правильных решеток.

Уравнения /35/ позволяют найти собственное значение системы.

Выше была изложена методика расчета эффективности поглощающих стержней в активной зоне реактора с $k_\infty > 1$. Она позволяет также рассматривать размножающие стержни в немумультиплицирующей среде и в среде с $k_\infty < 1$. Никакой принципиальной разницы в этом рассмотрении не будет. Отличие будет заключаться лишь в том, что в решении уравнения диффузии необходимо будет функции Бесселя действительного аргумента заменить функциями Бесселя мнимого аргумента в соответствии с действительностью или мнимостью величин κ , определенных по формулам /3/ или /26/.

Результаты некоторых расчетов

По изложенной методике была рассчитана эффективность поглощающих стержней в реакторе с водяным замедлителем внешним радиусом 150 см и высотой 266 см. Активная зона характеризуется величинами $\zeta = 71 \text{ см}^2$ и $L^2 = 6,9 \text{ см}^2$.

-17-

Поглощающие стержни (трубы из бористой стали, содержащие внутри воду) характеризуются следующими размерами:

$$\varnothing_1 = 7,06 \text{ см}$$

$$\varnothing_2 = 7,56 \text{ см}$$

Эффективность регулирующих органов

Вариант	№ рис.	метод рассмотрения	Эффективность системы стержней ΔK_{∞}	Коэффициент интерференции φ
I	4	одногрупповой	0,0094	1,3
2	4	двухгрупповой	0,0066	1,3
3	5	одногрупповой	0,0300	1,3
4	6	- " -	0,0314	0,9
5	7	- " -	0,0227	1,5
6	8	- " -	0,0364	1,4
7	9	- " -	0,0555	1,8
8	10	- " -	0,0386	1,5

В таблице даны эффективности стержней, а на рис. 4-10 приведены рассчитанные нейтронные поля для разных схем расположения поглощающих стержней в реакторе. Эти схемы указаны на рис. 2,3. Кривые нормированы так, чтобы полное число нейтронов в реакторе со стержнями и без стержней было одно и то же.

Распределение нейтронного потока по радиусу реактора дано по двум наиболее характерным направлениям "I" и "2", которые указаны на каждом рисунке. Для сравнения пунктирной линией отмечено распределение нейтронов в реакторе без стержней.

На рис. 4 приводятся результаты одногруппового и двухгруппового рассмотрения системы из двух поглощающих стержней. (I - одна группа; II - тепловые нейтроны, две группы; III - быстрые нейтроны, две группы). Этот случай был рассмотрен при различной степени учета (различное число гармоник) угловой зависимости нейтронного потока вокруг стержней. Расчеты показали, что учет зависимости поля от угла вокруг стержней приводит к изменению эффективности меньше

-18-

чем на 1%. Результаты расчета по одной и двум группам показывают, что для толстых ($\rho^2 \gg \tau$) поглощающих стержней, содержащих воду, эффективность, рассчитанная по двум группам, может быть одного порядка с эффективностью, рассчитанной по одной группе. Таким образом для таких стержней можно делать предварительные оценки по более простой одnogрупповой методике. Нейтронные потоки, рассчитанные по одной и двум группам, сильно различаются только вблизи стержней (рис. 4).

На рис. 5-10 даны результаты расчета полей в одnogрупповом рассмотрении. Несмотря на то, что поглощающие стержни довольно толстые ($\frac{\rho}{R} \sim 0,05$), учет зависимости поля от угла вокруг стержней во всех рассмотренных случаях при симметричном расположении стержней изменял эффективность меньше чем на 1%.

Коэффициент интерференции стержней, определяемый как

$$\psi = \frac{\Delta K_{\infty(1,2,\dots,N)}}{\sum_{i=1}^N \Delta K_{\infty i}},$$

может существенно отличаться от единицы. Отсюда возникает необходимость решения полной задачи об эффективности нескольких стержней, не ограничиваясь оценкой эффективности одного стержня.

На рис. 4-10 видно, что наличие поглощающих стержней в активной зоне сильно искажает форму нейтронного потока. Это важно знать, чтобы правильно учитывать неравномерность поля тепловыделения в реакторе.

Оценка величины эффективности стержней и искажений, которые они вносят в распределение потока нейтронов, позволяет делать рекомендации по выбору системы регулирования, профилирования расхода воды в активной зоне и т.д.

-19-

Л и т е р а т у р а

1. Зарецкий Д.Ф., Одинцов Д.Д. Эффективные граничные условия для "серых" тел. (Доклады советской делегации на Международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1955 г.)
2. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения, 1953 г. § 5.12 стр. 176
3. Zeitschrift für Naturforschung, 1957, Band 12a, Heft 5, s. 368
4. Галанин А.Д. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах, 1957 г. § 31 стр. 227

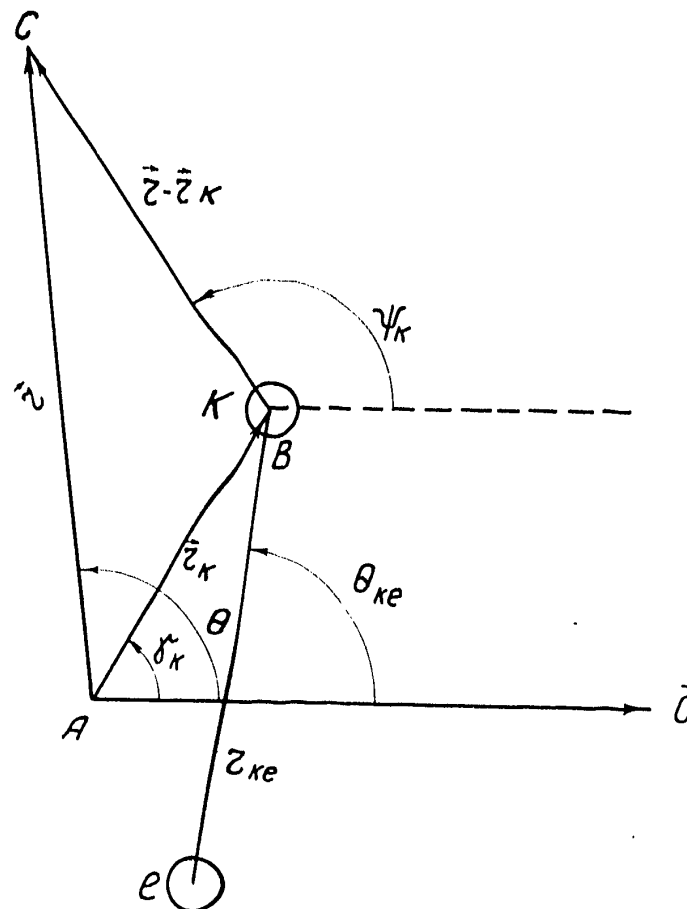


Рис.1.

А - центр активной зоны; В - ось К-го стержня; С - точка наблюдения; О - начало отсчета углов θ и ψ_k ; γ_k - угол от выделенного направления \vec{O} до \vec{z}_k , θ_{kl} - угол от выделенного направления \vec{O} до направления от l -го стержня на k -тый. Углы γ_k и θ_{kl} - постоянные, они зависят только от расположения стержней.

Углы отсчитываются от \vec{O} против часовой стрелки, r_{kl} - расстояние между стержнями l и k .

2907-80

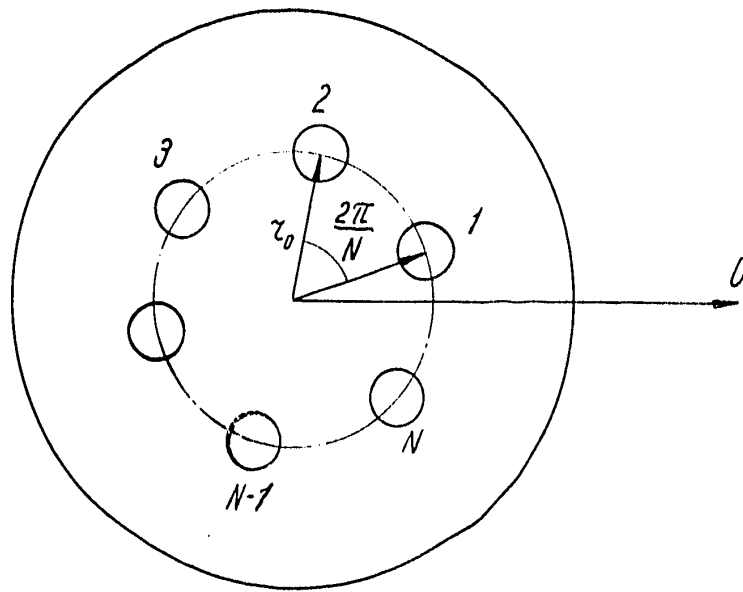


Рис. 2

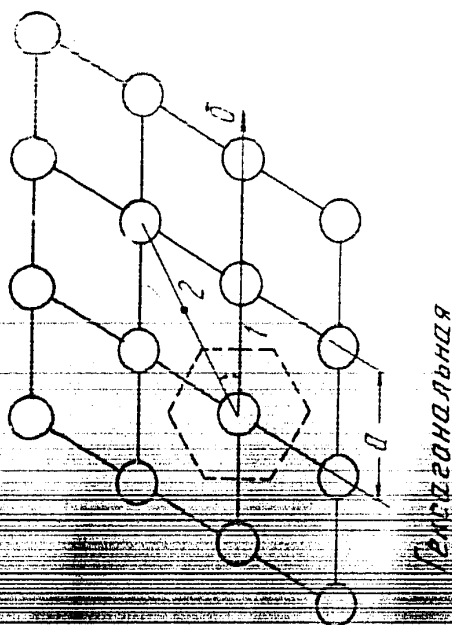
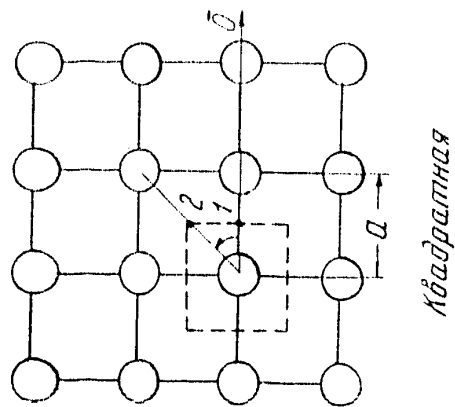
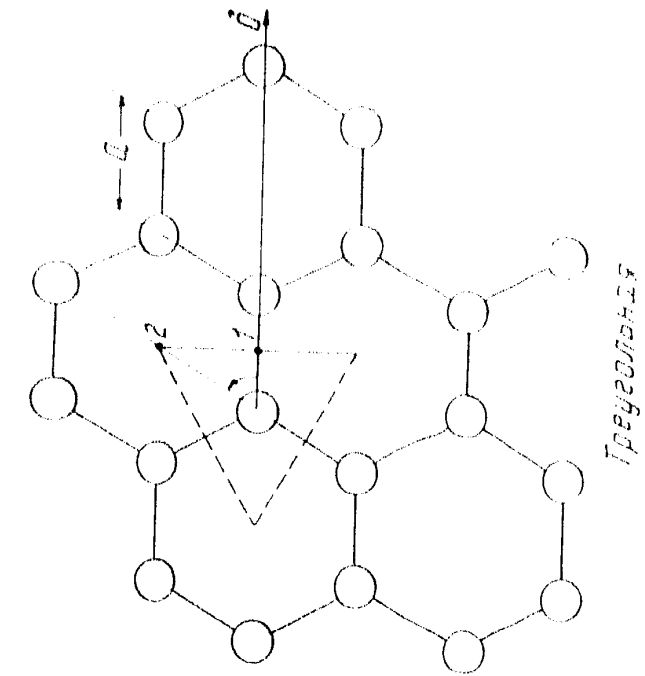


Рис. 3

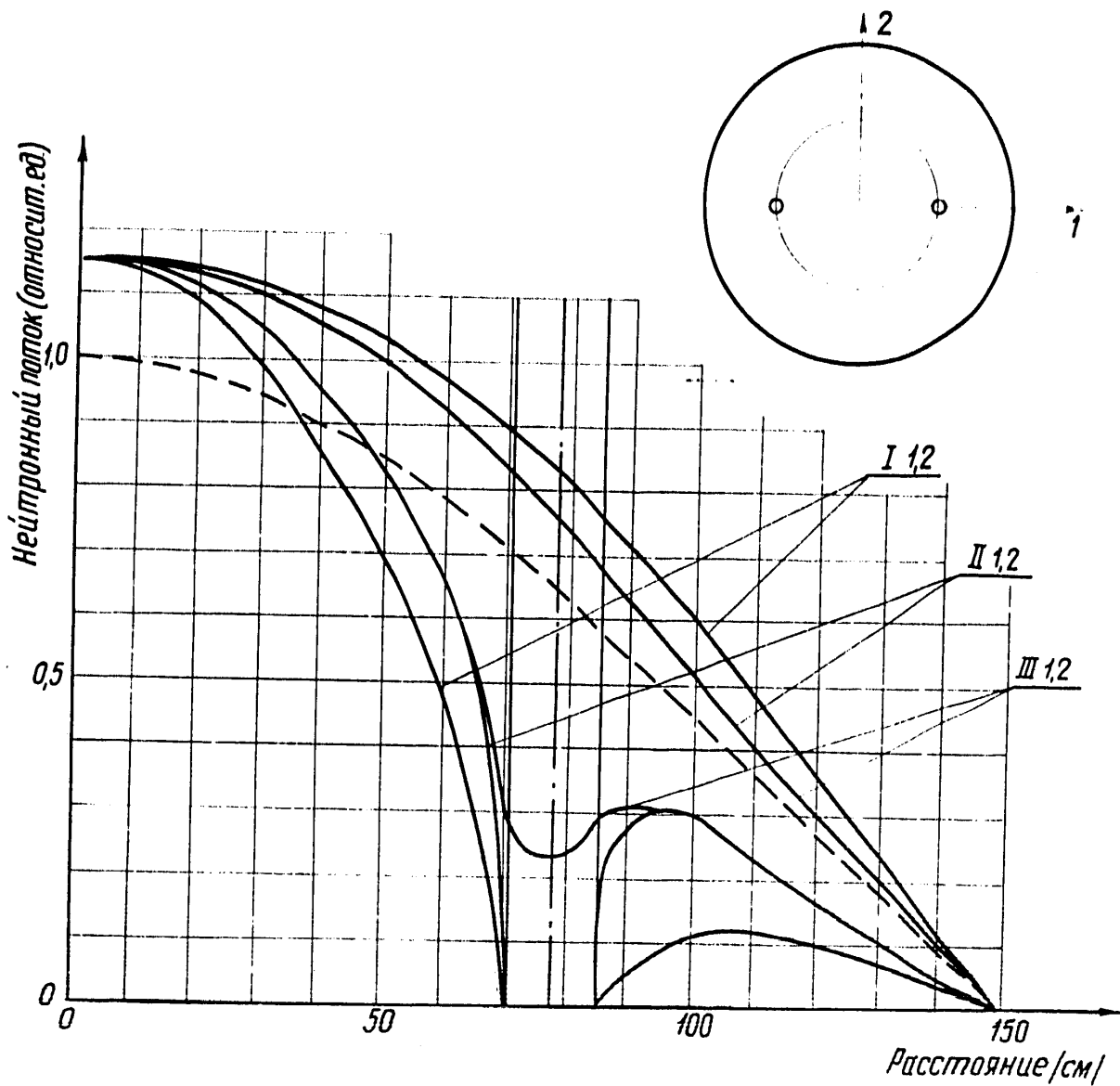


Рис. 4

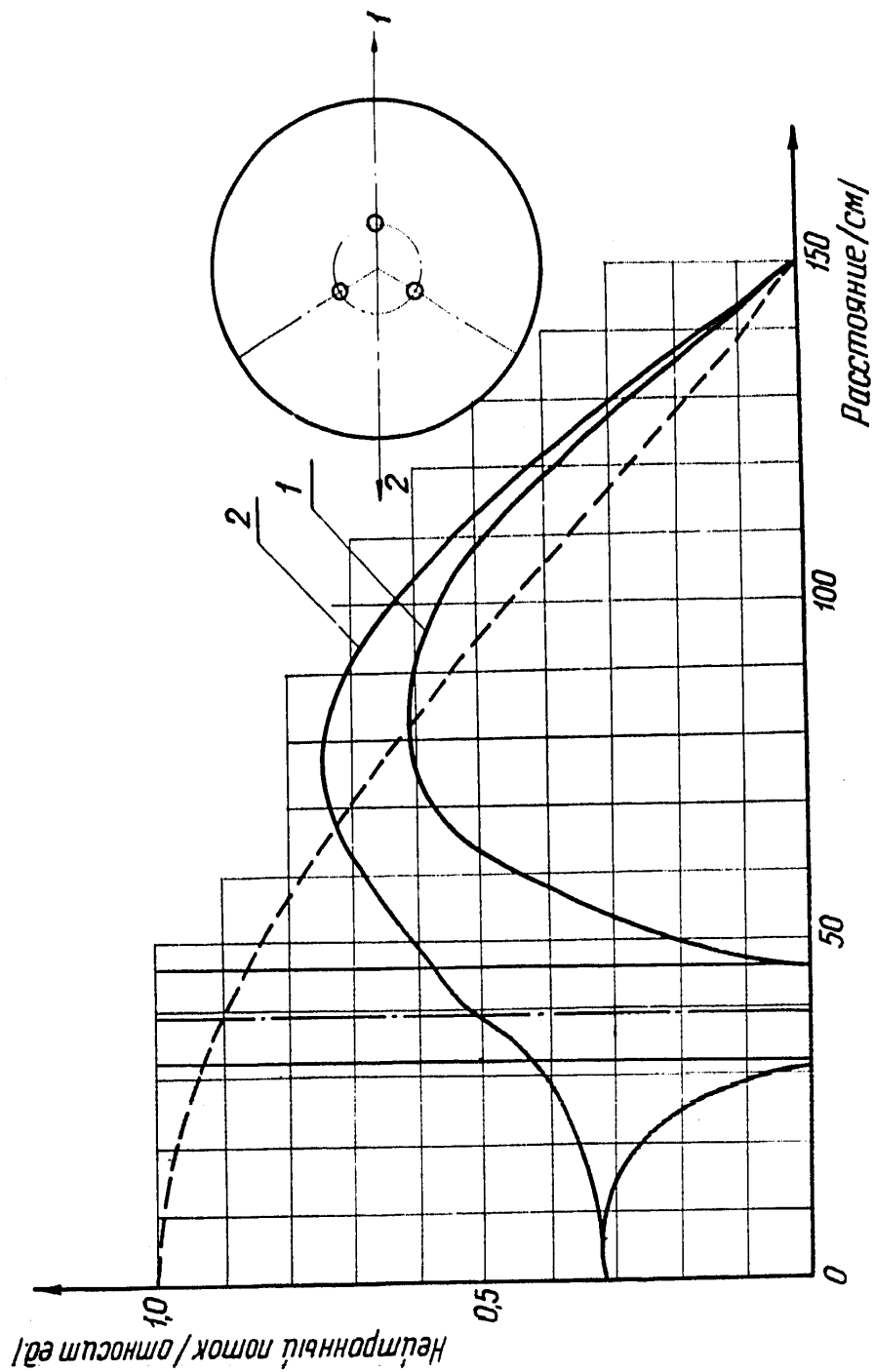


Рис. 5

2907-80

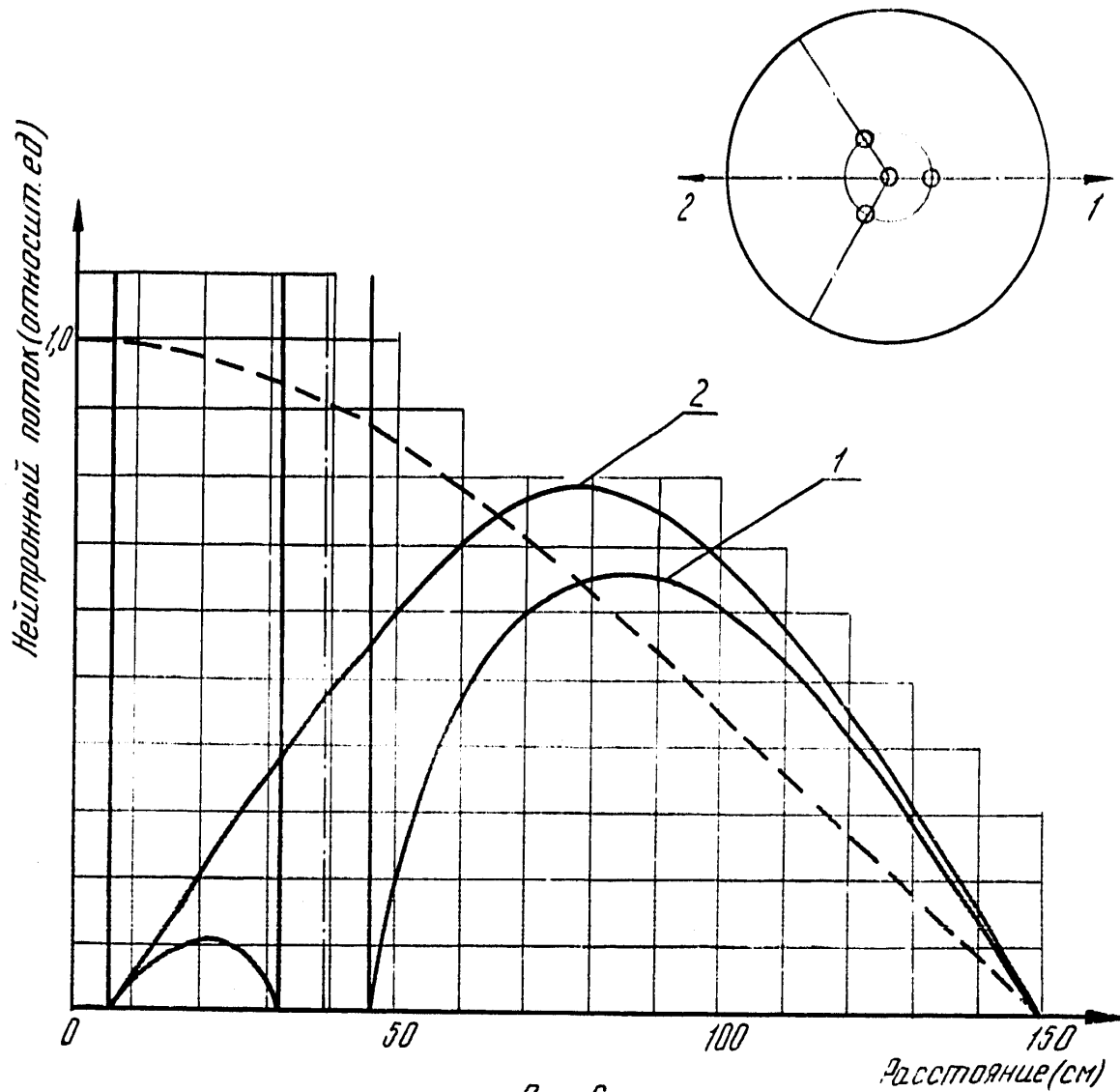


Рис. 6

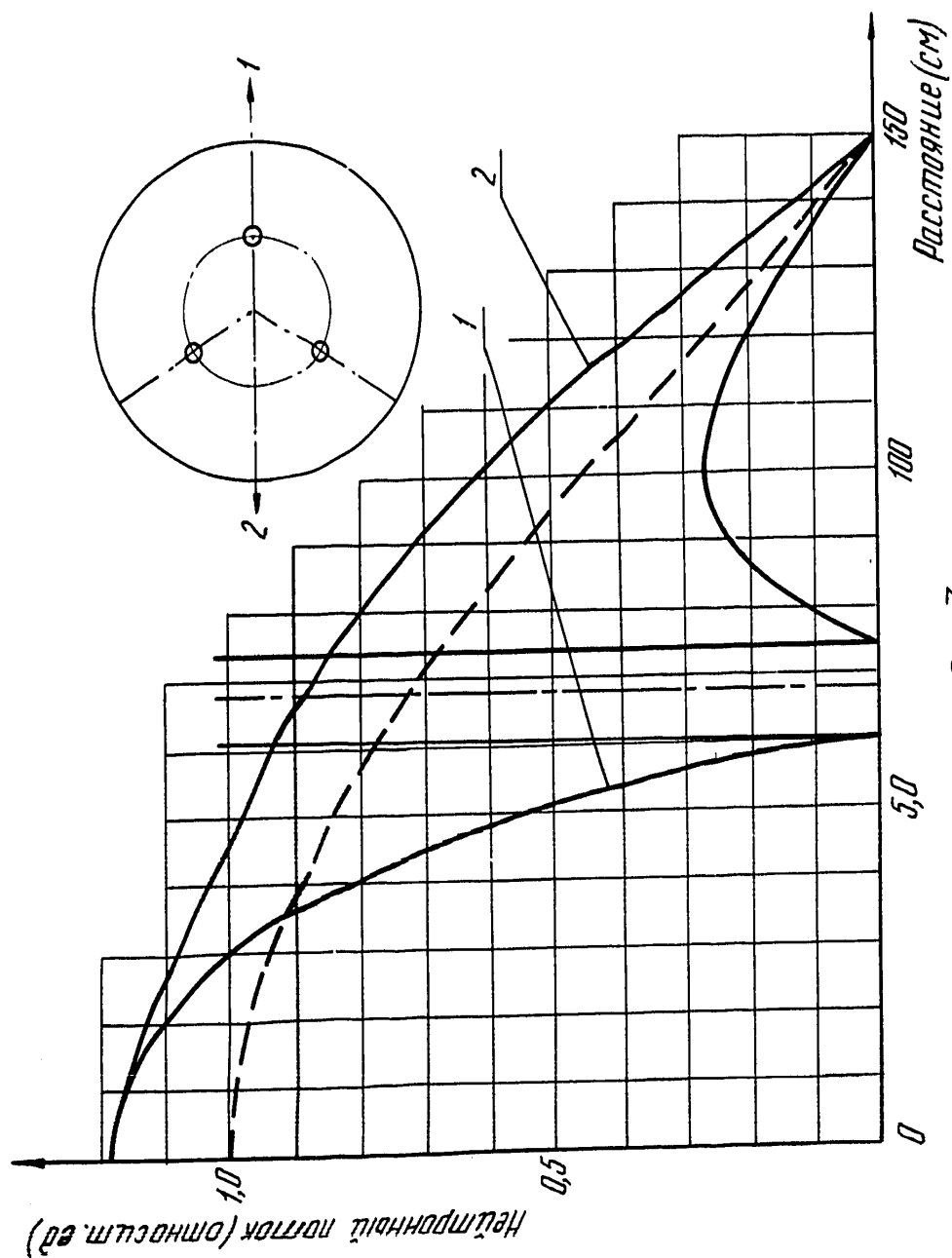


Рис. 7

2907-80

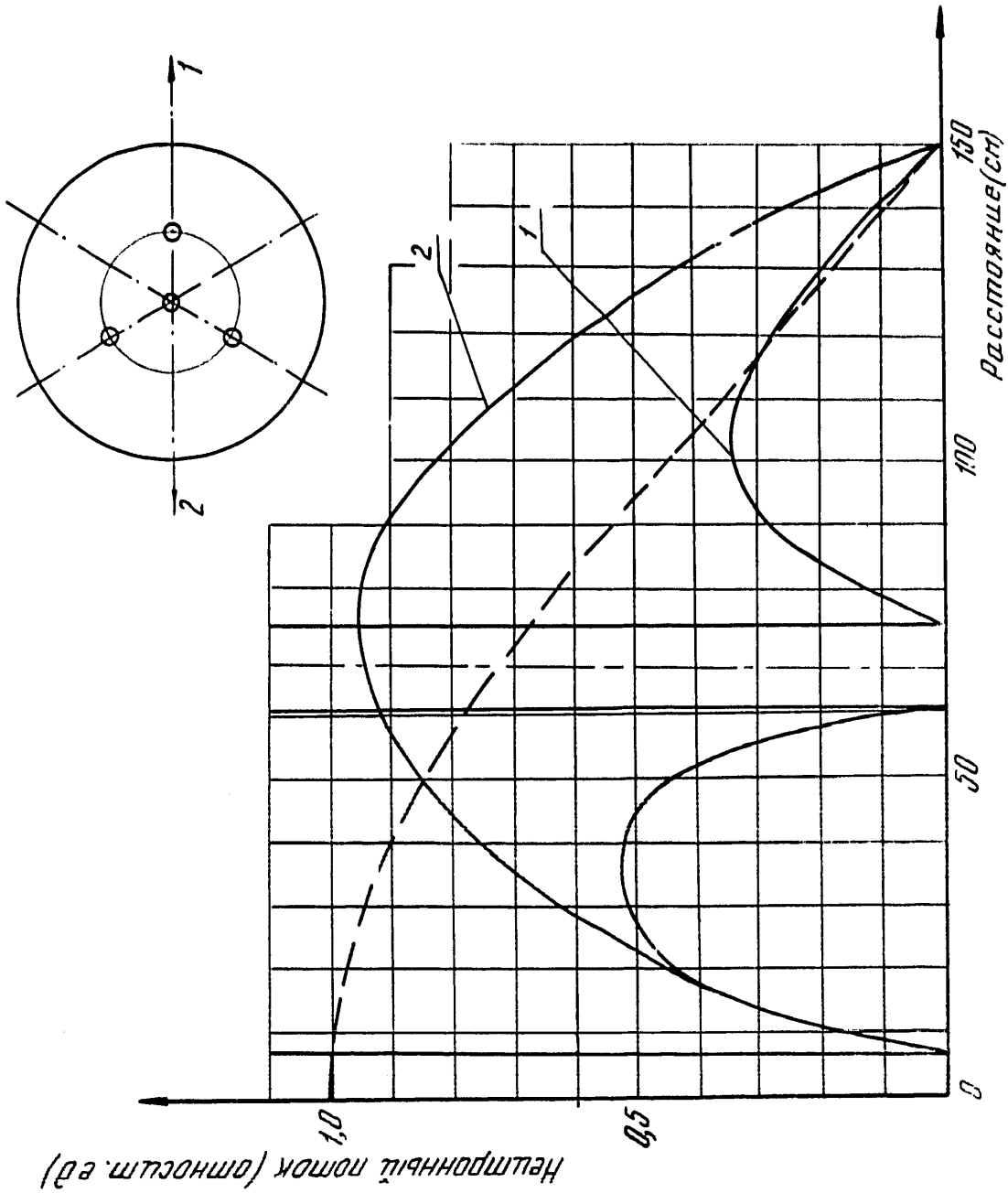


Рис. 8

